

7–8 КЛАССЫ

1. Последовательность чисел a_0, a_1, a_2, \dots задается по правилу: a_0 и a_1 — произвольные натуральные числа, $a_2 = a_0^2 + a_1^2$, $a_3 = a_1^2 + a_2^2$, и так далее — каждое следующее число равно сумме квадратов двух предыдущих. Что можно сказать о четности числа $a_1 + a_{2026}$ (всегда четное, всегда нечетное, зависит от выбора чисел a_0 и a_1)?

Решение. Заметим, что четность при возведении в квадрат сохраняется. Рассмотрим четыре варианта начальных условий (для краткости пишем только остатки от деления на 2, т. е. четные числа обозначаем 0, нечетные 1). Правила сложения: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Первый вариант $a_0 = 0$, $a_1 = 0$. Тогда все $a_n = 0$, значит, $a_1 + a_{2026} = 0$, т. е. четное. Если $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, то $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, получаем последовательность 011011011.... Поскольку 2026 при делении на 3 дает остаток 1, то $a_{2026} = 1$, значит, $a_1 + a_{2026} = 1 + 1 = 0$, т. е. четное. Если $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, то $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, получаем последовательность 101101101..., тогда $a_{2026} = 0$, значит, $a_1 + a_{2026} = 0 + 0 = 0$, т. е. четное. Наконец, если $a_0 = a_1 = 1$, то последовательность 110110110..., тогда $a_{2026} = 1$, $a_1 + a_{2026} = 0$, т. е. четное.

Ответ: всегда четное.

2. 30 студентов с пяти курсов сочинили для школьной олимпиады 40 задач (с каждого из курсов участвовал хотя бы один студент, каждый студент сочинил хотя бы одну задачу). Студенты с одного курса сочиняли одинаковое число задач, студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов сочинили по одной задаче?

Решение. Возьмем по одному студенту с каждого из пяти курсов. Они сочинили $\geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ задач. Тогда оставшиеся 25 студентов сочинили $\leq 40 - 15 = 25$, т. е. каждый из них сочинил по одной задаче. Учтем еще одного студента из начальной группы с разных курсов.

Ответ: 26.

3. Чтобы оторвать груз массой 100 кг от поверхности Луны, нужно преодолеть силу её притяжения. Найдите работу, необходимую для подъема груза на высоту 100 м. Масса Луны $7,35 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны 1737 км.

Решение. Сначала найдем ускорение свободного падения на поверхности Луны:

$$g = \frac{GM}{R^2} \approx 1,62 \text{ м/с}^2$$

Теперь найдем работу:

$$A = mgh = 16\,200 \text{ Дж.}$$

Ответ: 16,2 кДж.

4. На орбите летают N космических аппаратов. Каждый из них — либо спутник ДЗЗ, либо спутник связи, либо орбитальная станция. Напишите программу на своем любимом языке программирования, принимающую на вход число N и N чисел, разделенных пробелами. Каждое число задает тип КА: число 1 обозначает спутник ДЗЗ, число 2 — спутник связи, число 0 — орбитальную станцию.

Программа должна вывести одно целое число: наименьшее расстояние от космического аппарата до ближайшей к нему орбитальной станции. Расстояния между соседними аппаратами равны между собой и равны условной единице.

Пример:

ВВОД:

10

2 0 1 1 0 1 0 2 1 2

ВЫВОД:

1 0 1 1 0 1 0 1 2 2

Пояснение: на орбите находятся 10 аппаратов: спутник связи, орбитальная станция, спутник ДЗЗ, спутник ДЗЗ, орбитальная станция, спутник ДЗЗ, орбитальная станция, спутник связи, спутник ДЗЗ, спутник связи. Расстояния между любыми двумя соседними аппаратами равны, в том числе, между первым и последним в списке, так как орбита круговая. Значит, расстояние от первого в списке спутника до ближайшей станции равно 1, от станции до себя 0, от третьего в списке спутника до ближайшей станции 1, от следующего до ближайшей станции 1, от станции до себя 0, от шестого в списке спутника до ближайшей станции 1, от станции до себя 0, далее 1, далее 2 (до станции, которая в списке под номером 7), далее тоже 2 (до станции, которая в списке имеет номер 2, она ближайшая, так как орбита круговая).

Решение.

```
N=int(input())
a=list(map(int,input().split()))
b=[]
for i in range(N):
    b.append(N+1)
for i in range(N):
    for j in range(N):
        if a[j]==0:
            b[i]=min(b[i],min(abs(i-j),abs(N+i-j)))
print(b)
```

5. В Солнечной системе наступило соединение Меркурия с Солнцем для Венеры (т. е. наблюдатель, находящийся на Венере, увидел Меркурий и Солнце в одной точке). Оказалось, что в этот момент расстояние между этими планетами было равно расстоянию от Марса до Земли, причем угол между Венерой и Землей для Солнца составил 90° (т. е. отрезки Солнце–Венера и Солнце–Земля перпендикулярны). Какая из планет в этот момент находилась дальше от Марса: Венера или Меркурий?

Расстояния от Солнца до: Меркурия — 0.42 а.е., Венеры — 0.72 а.е., Земли — 1 а.е., Марса — 1.52 а.е.

Решение. Все планеты Солнечной системы вращаются в одной плоскости (отклонения от плоскости пренебрегаем). Возможны две ситуации. Пусть Меркурий Me оказался между Солнцем S и Венерой V . Тогда $VMe = VS - MeS = 0.3$ (все расстояния будут в а.е.). Минимальное возможно расстояние между Землей G и Марсом M равно 0.52, так что данный вариант отпадает. Значит, Меркурий оказался за Солнцем относительно Венеры, т.е. $VMe = 1.14$. Земля находится на прямой, перпендикулярной прямой VMe и проходящей через Солнце. Марс находится на пересечении двух окружностей: с центром в G радиуса 1.14 и с центром в S радиуса 1.52. Эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих по разные стороны от прямой SG . Поскольку Венера и Меркурий тоже лежат по разные стороны от этой прямой, то одна из точек будет ближе к Венере, другая — к Меркурию.

Ответ: возможны оба варианта.

6. Вы знаете, что на геостационарной орбите находится очень много спутников. Однако спутники на селеностационарную орбиту (круговую орбиту в экваториальной плоскости Луны, находясь на которой, спутник будет иметь постоянную проекцию на поверхность Луны) до сих пор не выведены. Предположите, с чем это может быть связано. В каких точках лучше всего расположить спутники для наблюдения за лунной поверхностью?

Решение. Спутник на селеностационарной орбите будет испытывать силу притяжения Земли, большую, чем силу притяжения Луны. Значит, гравитационная модель двух тел к задаче не применима и надо использовать модель трех тел (Земля–Луна–спутник). В этой модели для определения зоны устойчивого движения вокруг меньшего тела (Луны) используется сфера Хилла. Радиус сферы Хилла

$$R_H = R \cdot \sqrt[3]{\frac{M_L}{3M_Z}} = 61,5 \cdot 10^3 \text{ км}$$

дает верхнюю границу для зоны устойчивого движения вокруг Луны (реальная зона устойчивого движения ограничена величиной $0,33-0,5$ радиуса сферы, т.е. от 20 до 30 тысяч километров от центра Луны). Таким образом, спутник, выведенный на селеностационарную орбиту, будет «в основном» двигаться по орбите Земли. Начальное влияние Луны следует воспринимать, скорее как гравитационный маневр, сделанный спутником. Конкретное поведение спутника под действием такого маневра зависит от точки орбиты, на которую мы вывели спутник после окончания вывода. Например, если точка вывода находится за Луной на луче, проходящим через центры Земли и Луны, то воздействие Луны на спутник сводится, в основном к ускорению по направлению движения. В результате спутник выйдет на сильно вытянутую эллиптическую орбиту Земли. Двигаясь по ней он «отстанет» от Луны (когда Луна совершит полный оборот, спутник не пройдет и половины своей орбиты). Второй пример — точка вывода лежит на отрезке Земля–Луна. Тогда спутник выйдет на орбиту Земли, лежащую наоборот ближе к Земле, чем орбита Луны. На этой орбите спутник обгонит Луну (когда спутник совершит полный оборот, луна не пройдет и половины своей орбиты). В любом случае, такой спутник не годится для наблюдения за поверхностью Луны. Лучше всего использовать точки Лагранжа. При этом, точки L_1 , L_2 и L_3 (коллинеарные) неустойчивы, так что неподвижный спутник в таких точках требует постоянной коррекции или «живет в них» недолго. Несмотря на это, эти точки (а именно, L_1 и L_2) сейчас активно используются для размещения аппаратов: при правильно подобранных начальном положении и скорости спутника его орбита в окрестности L_1 и L_2 становится стационарной (для задачи трех тел) или почти стационарной (с учетом притяжения Солнца). Точки L_4 и L_5 устойчивы, но находятся далеко от поверхности Луны (расстояние такое же, как от Земли до Луны) и, таким образом, не несут никакой выгоды по сравнению, например, с орбитой МКС. К тому же, в L_4 и L_5 накапливается космический мусор, что создает для спутника опасность. Можно использовать орбиты небольшой высоты над Луной. На них влияние Земли невелико и орбита устойчива. При этом, использовать совсем низкие орбиты нельзя — гравитационный потенциал Луны сильно неоднороден (в отличие от Земли) и низкая орбита будет быстро деградировать, вырождаясь в эллиптическую. В результате, низкий спутник быстро упадет на поверхность Луны.